

Matematik dan Realiti: Satu Penelitian terhadap Takrif-takrif Matematik*

Muhammad Ikhwan Azlan*

ikhwan@kuis.edu.my

Abstract

The role of mathematics as a foundation of other sciences is well acknowledged since the dawn of modern science. This fundamental and important role is then not only limited to the natural and physical sciences but also further extended to the social domains of humanities. This article reviews the many definitions of mathematics as put forth by philosophers and mathematicians, how these definitions are understood, and how

-
- * Presented at the 2017 *International Ulama' Conference—Islam and Civilisational Awakening* organised by the Malaysian *Tarekat Muktabar Organisation (PERTAMA)* on 26–28 July 2017. This article is a revision of the paper presented at the Academic Talk Programme organised by the Selangor Matriculation College (KMS) in collaboration with the Darul Ehsan Institute (IDE) on 24 June 2016 and the 2017 *International Conference on the Social Science and Humanities (PASAK)* organised by Selangor International Islamic University College (KUIS) on 27 April 2017.
 - ❖ Lecturer at the Department of Islamic Understanding and Thought, Centre for Core Studies, Selangor International Islamic University College, 43000 Kajang, Selangor Malaysia and a PhD student at the Centre for Advanced Studies on Islam, Science and Civilisation (CASIS) of the University of Technology Malaysia.

they subsequently influence the development of mathematics itself as well as other disciplines influenced by mathematics. These definitions are: mathematics as the science of teaching and learning (*‘ulūm al-ta‘ālim*); mathematics as abstraction or the construction of abstracts; mathematics as logic; mathematics as a formal system; mathematics as the science of quantity and structure, mathematics=ontology; and mathematics as intellectual exercise (*riyādiyyāt*). Based on the aforementioned definitions, this article attempts to analyse the ontological status of mathematics and mathematical objects based on the degrees of existence (*marātib al-wujūd*) framework which orders existence into five levels, namely essential existence (*wujūd dhātī*), concrete existence (*wujūd ‘aynī*), mental existence (*wujūd dhīhnī*), verbal existence (*wujūd lafzī*), dan formal or written existence (*wujūd khattī*).

Keywords

Mathematics, mathematisation, definition of mathematics, *marātib al-wujūd*.

Apakah itu matematik? Persoalan ini adalah persoalan yang rumit sekiranya kita benar-benar mahu berlaku adil kepadanya. Persoalan-persoalan seumpama ini selalunya diklasifikasikan sebagai persoalan-persoalan falsafah atau yang bersifat falsafi. Malah, boleh dikatakan tujuan utama bidang Falsafah Matematik ialah menjawab persoalan ini, berserta persoalan-persoalan lain yang menatijahkannya serta yang terbit daripadanya. Bagaimanakah harus kita menjawab persoalan ini? Persoalan mengenai hakikat matematik ini boleh diteroka menerusi sekurang-kurangnya dua jalan:

Jalan yang pertama ialah menerusi penelusuran takrif-takrif matematik yang pernah dikemukakan oleh para ilmuwan dan sarjana sama ada ahli-ahli dalam bidang matematik sendiri ataupun yang bukan ahli tetapi mempunyai pengalaman dan ilmu yang luas.

Manakala jalan yang kedua ialah dengan meneliti pekerjaan ahli-ahli matematik itu sendiri, apakah matlamat dan hala tuju pengkajian mereka, apakah objek-objek ilmu mereka, apakah kaedah dan metodologi pengkajian mereka, apakah domain atau ruang lingkup pengkajian mereka, dan sebagainya.

Jalan yang pertama tadi tidaklah sebenarnya terpisah daripada jalan yang kedua yang lebih banyak ranjaunya. Jalan yang pertama itu boleh dikatakan pengkajian terhadap kesimpulan-kesimpulan yang dikemukakan oleh ilmuwan-ilmuwan dan sarjana yang berwibawa setelah mereka menempuh jalan yang kedua tadi. Memandangkan ilmu matematik adalah ilmu yang sudah begitu lama berakar-umbi dalam sejarah, maka tidaklah menghairankan sekiranya kita mendapati kesimpulan-kesimpulan daripada jalan yang pertama itu pun sudah begitu rencam dan mampu menenggelamkan kita dalam lautan takrif-takrif matematik yang pelbagai.

Apakah pula yang dimaksudkan dengan realiti? Bagaimanakah harus kita jawab persoalan ini? Sekiranya direnung dan difikirkan, soalan inilah yang mendasari sekalian penerokaan sains dan falsafah, malah sekiranya soalan ini diungkapkan semula dengan cara tertentu yang lain, ia juga adalah tujuan akhir agama. Tentu sekali bukan menjadi tujuan penulisan ini untuk menjawab persoalan yang begitu besar ini melainkan sekadar meneroka dan menganalisis beberapa hubungan antara sifat-sifat yang ada pada matematik dan sifat-sifat yang ada pada realiti. Sebagai permulaan, kita ungkapkan di sini bahawa realiti yang kita maksudkan di sini ialah hakikat. Perkataan hakikat atau *ḥaqīqah* dalam bahasa Arab ini mempunyai hubungan dengan perkataan *ḥaq*, yang akhirnya merujuk kepada *al-Ḥaqq* dan perkataan ini merujuk kepada salah satu daripada Nama-Nama Agung bagi Tuhan Semesta Alam.

Seorang ateis yang tidak mempercayai kewujudan tuhan tentu sekali akan terus membantah atau mengabaikan sama sekali perbincangan tadi kerana baginya semua ini hanyalah

kata-kata yang kosong, kata-kata yang hampa makna. Namun, bagi seorang yang beragama dan meyakini kewujudan Tuhan Semesta Alam juga boleh menganggap bahawa ungkapan ini sekiranya dikira hanya sebagai ungkapan semata-mata juga hampa, kerana sesiapa sahaja boleh mengungkapkannya, boleh menuliskannya, sedangkan apakah yang difahaminya dengan ungkapan itu, apa yang terjelma dalam kesedaran dirinya, apakah perasaan atau pengalaman atau tindakan yang terhasil daripada pemahaman makna di sebalik ungkapan itulah yang menentukan sama ada ungkapan tadi benar-benar menjawab persoalan yang pertama tadi.

Namun, realiti dapat difahami pada berbagai-bagai peringkat kefahaman. Realiti fizikal yang dialami oleh deria inderawi kita ini juga merupakan satu peringkat realiti. Begitu juga dengan realiti kemanusiaan dan kemasyarakatan yang sememangnya kita alami dan sentiasa berhadapan secara dekat dengannya. Dalam penulisan ini kita hadkan makna realiti kepada dua makna ini.

Rencana penyelidikan sains hari ini secara kasarnya adalah merupakan warisan daripada perkembangan yang bertitik-tolak daripada revolusi sains yang berlaku di Eropah. Salah satu aspek penting yang mencirikan penerokaan sains atau falsafah tabii selepas berlakunya revolusi sains ini ialah *pematematikan gambaran alam* iaitu suatu proses mengungkapkan semula fenomena-fenomena yang diperhatikan atau dialami menerusi ungkapan-ungkapan matematik, sama ada fenomena fizikal mahupun fenomena sosial.¹ Kenyataan bahawa pengalaman inderawi mempengaruhi pembentukan konsep-konsep asas dalam ilmu matematik sememangnya dimaklumi.² Namun asas kepada kenyataan yang akan

1. Untuk huraian lanjut mengenai *pematematikan gambaran alam* lihat John Henry, *The Scientific Revolution and the Origins of Modern Science* (New York: Pelgrave, 2002), 14–29 dan David Wootton, *The Invention of Science: A New History of the Scientific Revolution* (London: Penguin Random House, 2015), 163–211.
2. Antara kajian terkini yang meneliti aspek ini ialah dalam George Lakoff & Rafael E. Núñez, *Where Mathematics Comes From? How Embodied Mind Brings Mathematics into Being* (New York: Books, 2000). Lihat juga

diperhalusi di sini iaitu kenyataan bahawa konsep-konsep matematik menentukan atau mempengaruhi pembentukan kefahaman kita terhadap realiti fizikal mahupun sosial. Inilah yang mencirikan aktiviti *pematematikan* yang disebutkan tadi. Apabila ini berlaku, perkembangan pengkajian dalam bidang matematik itu sendiri mempengaruhi pengkajian dalam bidang-bidang yang menggunakan matematik sebagai wasilah bagi mengungkapkan teori-teorinya, yang pada hari ini meliputi keseluruhan bidang-bidang ilmu yang dinamakan dengan nama “sains”. Bertitik-tolak daripada ini, persoalan mengenai sejauh manakah “bahasa matematik” ini berupaya untuk mengungkapkan realiti dengan benar mula ditimbulkan.

Oleh itu, penting untuk kita menimbulkan semula dan meneruskan perbincangan mengenai sifat-sifat asasi ilmu matematik ini terutamanya berdasarkan perkembangannya yang lebih mutakhir serta hubungannya dengan apa yang difahami sebagai realiti. Sebagai permulaan, dalam ruangan yang berikut akan dibincangkan secara ringkas beberapa takrif matematik yang utama.

Beberapa Takrif Matematik

Amat sukar untuk kita menyenaraikan semua takrif bagi matematik yang pernah dikemukakan oleh para ilmuwan terdahulu. Kesukaran ini bertambah apabila kita menyedari bahawa pengkelasan ilmu juga sentiasa berubah dari satu masa ke satu masa yang lain, dari satu konteks masyarakat ke konteks masyarakat yang lain. Matematik yang kita fahami sebagai matematik ini pada suatu masa dahulu tidak mempunyai nama yang khusus, tetapi nama-nama lain yang mewakili aspek-aspek tertentu dalam apa yang kita fahami pada hari ini sebagai matematik. Misalnya, perkembangan

Rafael Núñez, “Do Real Numbers Really Move? Language, Thought, and Genre: The Embodied Cognitive Foundations of Mathematics” dalam *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, ed. Reuben Hersh (New York: Springer, 2006), 160–181.

matematik dalam tamadun Islām selepas abad ke-12 banyak berlaku dalam ilmu falak, ilmu hay'ah, atau astronomi, yang sekiranya kita gunakan klasifikasi pada hari ini, kita akan meletakkannya di bawah kategori geometri Euclidean.³

Oleh itu, perlu ditegaskan di sini bahawa takrif-takrif yang dikemukakan berikut ini bukanlah merangkumi kesemua takrif yang ada. Takrif-takrif ini dikemukakan semula berdasarkan kesesuaiannya dengan idea keseluruhan dalam menghubungkan matematik dan realiti dan setiap satunya berkait, malah bertindan, antara satu dengan yang lain.

Matematik sebagai Sains Pengajaran dan Pembelajaran

Antara permasalahan dalam mentakrifkan matematik ini adalah pada istilahnya itu sendiri. Abū Naṣr al-Fārābī (m.951), seorang ahli falsafah ulung dalam peradaban Islām, yang menerusi karya-karyanyalah unsur-unsur falsafah Yunani yang ditunjangi Aristotle dan Plato yang kemudiannya disadur oleh Plotinus masuk menjadi sebahagian daripada khazanah perbendaharaan ilmu Islām, yang menerusi penjelasan beliaulah seorang lagi ahli falsafah ulung Islām, Ibn Sīnā (m.1037) dapat memahami metafizik Aristotle dan mengembangkannya, menamakan matematik dalam bahasa Arab sebagai *'Ulūm al-Ta'ālīm* yang bermaksud “sains pengajaran” atau “pengetahuan secara bersistem mengenai pengajaran”.⁴ Daripada nama ini sendiri dapat kita simpulkan bahawa al-Fārābī menterjemahkan maksud asal perkataan Yunani *ta mathēmata* itu yang bermaksud “sesuatu yang boleh

-
3. Masalah yang sama telah dihuraikan oleh Profesor Dr. Shaharir Mohamad Zain seawal tahun 1987 dalam Shaharir Mohamad Zain & Abdul Latif Samian, “PengIslāman Sains Matematik” yang dibentangkan sebagai kertas kerja *Seminar Kebangsaan Isu-Isu Semasa dalam Sains* anjuran ASASI-IKDM pada 13–14 Jun 1987, halaman 6–8. Makalah ini juga menyenaraikan 14 takrif matematik yang berbeza yang beberapa daripadanya dipertimbangkan semula di sini.
 4. Lihat Osman Bakar, *Classification of Knowledge in Islām* (Kuala Lumpur: ISTAC, 2006), 100.

dipelajari,” maka pada masa yang sama “sesuatu yang boleh diajarkan”. Ahli falsafah aliran existensialism Jerman, Martin Heidegger (m.1976), dalam makalahnya *Natural Science, Metaphysics, and Mathematics*, yang merupakan satu tajuk daripada karya yang lebih besar, *What is a Thing?*, memulakan perbincangan mengenai objek-objek matematik atau “*the mathematical*” dengan menelusuri etimologi perkataan asalnya dalam bahasa Yunani tadi.⁵

Namun, bagaimanakah harus kita fahami perkaitan antara matematik dengan pengajaran dan pembelajaran? Apakah “pengajaran” dan “pembelajaran” yang dimaksudkan di sini? Bagaimanakah seorang itu “belajar” sesuatu daripada seorang yang lain? Persoalan-persoalan ini sememangnya membuka satu jendela kepada pemandangan yang luas untuk diterokai. Sebagai permulaan, kita pertimbangkan satu kiasan berikut.

Bayangkan seorang tukang masak yang mahir tiada bertolak banding, yang masakannya membangkitkan rasa lazat yang tidak dapat diungkapkan oleh mereka yang merasai masakannya dengan kata-kata. Kelazatannya hanya dapat difahami oleh mereka yang dapat merasa masakannya sahaja. Si tukang masak ini akhirnya diminta untuk mengajarkan rahsia masakannya itu supaya kelazatan masakan yang sama dapat dinikmati oleh lebih ramai lagi. Akhirnya si tukang masak membuat keputusan untuk mendokumenkan semua masakannya dalam bentuk sebuah buku resipi yang amat rinci. Setiap bahan, setiap sukatan, setiap petua, prinsip, langkah, prosedur dan kaedah, setiap susun-atur giliran bahan, setiap sukatan suhu dan tempoh masa, nisbah antara bahan dan berbagai-bagai perincian yang lain-lain itu semuanya disusun kemas secara bersistem dalam buku resipi masakannya. Harapannya, sesiapa sahaja yang tahu membaca dan mengira

5. Martin Heidegger, “Modern Science, Metaphysics, and Mathematics” in *Martin Heidegger Basic Writings* terjemahan oleh W. B. Barton Jr. and Vera Deutsch, disunting oleh David Farrell Krell (New York: Harper Collins, 1977), 273–279.

pasti dapat mengulang masakannya itu sendiri tanpa perlu si tukang masak itu menyediakannya. Maka di sini, buku resipi tadi itulah tamsil kepada objek-objek matematik yang menerusinya suatu tujuan tertentu itu dapat dicapai. Dalam hal ini, tujuannya ialah kenikmatan masakan tukang masak yang handal tadi. Proses pengungkapan resipi-resipi tadi adalah tamsil kepada pengajaran manakala proses menuruti resipi yang sudah sedia terungkap sehinggalah masakan yang dikehendaki itu dapat dihasilkan itulah yang menjadi tamsil kepada pembelajaran.

Heidegger dalam makalahnya *Modern Science, Metaphysics, and Mathematics* membahaskan semula dengan jelas perihal “sifat matematik” (*the mathematical*) sebagai “sesuatu yang boleh dipelajari” (*what is learnable*) ini. Mengambil tamsil buku resipi, Heidegger menjelaskan bahawa apabila buku tersebut mengarahkan kita supaya “ambil” sesuatu bahan atau alat masakan, ia sebenarnya juga mengarahkan kita supaya “gunakan” bahan atau alat itu.⁶ Proses “pengajaran” yang datang dalam bentuk buku resipi tadi hanya benar-benar berfungsi sebagai pengajaran apabila pihak yang “belajar” itu berbuat atau bertindak mengikut arahan yang ada dalam buku tadi dan mengalami sendiri proses memasak makanan itu sehinggalah dia menjadi mahir. Buku resipi itu sendiri bukan matlamat proses pengajaran dan pembelajaran, tetapi hasil akhir yang sudah sedia ada itulah yang menjadi matlamatnya. Maka, pihak yang belajar tadi pada hakikatnya hanyalah menggunakan buku resipi tadi untuk menzahirkan keupayaan yang semangannya sudah tersedia ada dalam dirinya.

Di sini Heidegger melanjutkan lagi makna “kebolehbelaian” (*learnability*) kepada “kebolehtahuan” (*knowability*) dengan menyatakan kesimpulan bahawa “sifat matematik” (*the mathematical*) itu tadi akhirnya adalah “andaian-andaian asasi mengenai pengetahuan terhadap sesuatu.”⁷ Oleh itu, beliau menterjemahkan istilah “*geometrētos*” dalam

6. Lihat Heidegger, “*Modern Science*”, 275.

7. *Ibid.*, 278.

kenyataan Plato yang tertera di pintu utama “Akademi”nya, “*Ageometrētos mēdeis eisito!*” bukan semata-mata sebagai “matematik” atau “geometri” sebagai satu disiplin ilmu tetapi sebagai “sifat matematik” tadi, atau “andaian-andaian asasi mengenai pengetahuan terhadap sesuatu,” dan inilah yang mendasari kerja-kerja “akademik” sepanjang zaman, dan inilah, menurut Heidegger, yang menjadi sifat asasi sains moden.⁸

Selanjutnya, satu lagi tamsil yang sesuai untuk dinyatakan di sini ialah tamsil matematik sebagai peta yang memetakan realiti. Michael Polanyi dalam membincangkan sifat objektif sesuatu teori sains, dalam karyanya *Personal Knowledge*, memisalkan teori sains sebagai sebuah peta, dan teori yang “bersifat matematik” (*mathematical theory*) adalah yang paling sempurna dalam hal ini.⁹ Beliau seterusnya menghujahkan bahawa sesuatu peta itu juga adalah satu bentuk permudahan kepada realiti. Sebuah peta tidak mungkin sepenuhnya sama dengan realiti yang digambarkan, tetapi dicekikan dan dimudahkan dengan menyatakan aspek-aspek yang paling penting dan mengabaikan aspek-aspek yang kurang penting pada realiti yang digambarkan. Hal ini akhirnya tertakluk kepada tujuan peribadi orang yang melukis peta tersebut (atau dalam konteks perbincangan di sini “pengajar”) dan peta itu menjadi satu perantaraan yang baik kepada pembaca peta (atau “pelajar”) sekiranya tujuan mereka berdua adalah sama. Akhirnya Polanyi tiba kepada kesimpulan bahawa sifat objektif yang ada pada sesuatu teori itu adalah cerminan sifat subjektif yang dipersetujui.¹⁰

8. Perlu dinyatakan juga di sini bahawa “andaian-andaian” ini menatijahkan pengetahuan mengenai had-had pengetahuan terhadap sesuatu. *Ibid.*, 278.

9. Michael Polanyi, *Personal Knowledge: Towards a Post Critical Philosophy* (Chicago: University of Chicago Press, 1st published 1958, revised paperback 1974), 4.

10. *Ibid.*, 16–17.

Matematik sebagai Pembinaan secara Abstrak

Immanuel Kant (m.1804) adalah seorang ahli falsafah yang telah membangunkan satu rangka-sistem yang boleh dikatakan menjelaskan dengan terperinci gambaran yang merangkumi keseluruhan proses kognitif manusia dalam mengetahui sesuatu. Penghujahan dalam karya-karya beliau boleh diumpamakan sebagai pembuktian matematik dalam pengertian bahawa setiap ruang fikiran diperhalusi sehabis-habisnya dengan pembuktian yang terperinci. Termasuk dalam ruang lingkup penerokaan falsafi Kant ini adalah mengenai matematik itu sendiri.

Kant mengelaskan matematik sebagai *synthetic a priori judgement*. Menariknya, Kant juga mengelaskan prinsip-prinsip yang mendasari falsafah tabii atau fizik juga sebagai *synthetic a priori judgement*. Lebih menarik, beliau menganggap metafizik sebagai berada dalam kategori *synthetic a priori proposition*. Berikut kita telusuri secara ringkas sistem yang dibina oleh Kant dan peristilahnannya.

Dalam karya agungannya, *The Critique of Pure Reason*, dan lanjutannya dalam bentuk yang lebih ringkas, *Prolegomena to Any Future Metaphysics*, Kant memperkenalkan satu sistem pengkategorian ilmu iaitu: *synthetic-analytic, a priori-a posteriori, proposition-judgement*. Berikut kita bincangkan secara ringkas makna istilah-istilah ini.

Untuk membezakan antara *synthetic* dan *analytic* kita pertimbangkan dua pernyataan berikut:

1. Kitab mengandungi tulisan.
2. Kitab penting untuk penyebaran ilmu.

Pernyataan yang pertama adalah bersifat *analytic* sedangkan pernyataan kedua bersifat *synthetic*. Pernyataan pertama bersifat *analytic* kerana “mengandungi tulisan” adalah termasuk dalam makna yang terkandung dalam istilah “kitab” kerana kitab yang tidak mengandungi tulisan

bukanlah kitab. Pernyataan kedua bersifat *synthetic* kerana “penting untuk penyebaran ilmu” tidak termasuk dalam makna yang terkandung dalam istilah “kitab”, tetapi sesuatu yang didatangkan dari luar istilah “kitab” itu. Namun, ini tidak bermakna pernyataan kedua tidak boleh ditentusahkan kebenarannya.

Yang dimaksudkan dengan istilah *a priori* ialah ilmu yang bersifat *badīhī* yang tidak bergantung kepada pengalaman inderawi, manakala *a posteriori* ialah ilmu yang terbit daripada pengalaman inderawi. Misalnya, “setiap perubahan pasti ada sebabnya” adalah *a priori*, manakala “air mendidih pada suhu 100oc pada tekanan paras laut” adalah bersifat *a posteriori*.¹¹

Secara keseluruhannya, matematik ialah aktiviti akliah yang membina struktur binaan abstrak bermula daripada prinsip-prinsip *badīhī* kepada prinsip-prinsip yang terbit daripada prinsip-prinsip *badīhī* tadi secara *synthetic* iaitu bukan termasuk dalam takrif atau makna yang tersirat dalam prinsip *badīhī* yang dipertimbangkan. Ia merupakan *intuition of pure space and time*, menurut Kant. Sebagaimana sebuah bangunan dibina di suatu tempat dan dalam tempoh masa tertentu, binaan abstrak ilmu matematik dibina di suatu “ruang abstrak” dan “masa abstrak” yang bersifat mujarrad daripada unsur-unsur jasmani.

Pemikiran Kant secara keseluruhannya dianggap sebagai revolusi Copernicus versi falsafah. Namun begitu, metafizik Kant hanya mengambil kira perkembangan sains tabii dalam paradigma Newton. Perkembangan sains dan matematik abad-abad berikutnya khususnya dalam bidang geometri bukan Euclid (*non-Euclidean geometry*) mencetuskan paradigma baharu dalam sains secara amnya. Geometri Euclid tidak lagi dianggap sebagai geometri tabii atau satu-satunya geometri yang dipertimbangkan dalam menanggapi fenomena

11. Immanuel Kant, *The Critique of Pure Reason* dalam *The Great Books of the Western World*, ed. Mortimer J. Adler, vol. 42. (Chicago: William Benton, 1952), 14–19.

alam. Kemuncak perkembangan ini adalah teori Relativiti Einstein yang buat pertama kalinya mengakibatkan geometri bukan Euclid yang selama ini pengkajiannya didominasi oleh ahli-ahli matematik tulen tanpa mengambil kira sama ada penerokaan itu mempunyai sandaran dalam alam tabii, menjadi dasar kepada teori graviti yang baharu. Sekiranya revolusi Copernicus memindahkan pusat alam semesta daripada bumi kepada matahari, paradigma yang baharu memindahkan pusat alam semesta ke mana-mana tempat yang dikehendaki berdasarkan kerangka sudut pandang masing-masing. Hal ini menimbulkan persoalan sama ada struktur dan kategori yang ditemukan dan dibahaskan dengan begitu berhati-hati dan terperinci oleh Immanuel Kant itu benar-benar muktamad, ataupun merupakan satu-satunya kerangka metafizik kognitif yang mungkin? Tambahan pula, perkembangan ilmu mantik semakin di“matematik”kan dalam bentuk simbol oleh ahli-ahli mantik seperti Boole dan Frege. Prinsip-prinsip yang selama ini dianggap sebagai prinsip *badīhiyah* atau *a priori*, misalnya, “*things that are equal to one and the same thing are equal to one another*” yang diambil daripada *Kitab al-Anāsir* oleh Euclid dapat dijelaskan menerusi prinsip-prinsip yang lebih asas dalam mantik simbolik. Apabila prinsip-prinsip yang lebih asas ini dijadikan batu asas, maka ahli-ahli mantik boleh membina struktur-struktur mantik yang tidak semestinya menghasilkan prinsip *badīhī* yang asal tadi, walaupun tidak semestinya juga bercanggah dengannya.¹² Maka, bertitik tolak daripada perkembangan inilah matematik mula dilihat hanya semata-mata sebagai mantik dan sistem formal.

12. Prinsip Euclid ini boleh ditulis semula sebagai “ $(a = b) \wedge (b = c) \Rightarrow (a = c)$ ”, yang merupakan prinsip yang lebih kuat daripada hukum transitif “ $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \Rightarrow (a \rightarrow c)$ ” yang kebenarannya disandarkan kepada prinsip bahawa sebarang pernyataan implikasi (jika p maka q) yang merupakan tautologi adalah bentuk hujah yang sah. Oleh itu, prinsip Euclid tadi bukan lagi dianggap sebagai *a priori*, tetapi syarat bagi pernyataan implikasi mestilah merupakan tautologi itulah yang menjadi *a priori*.

Matematik sebagai Logik dan Sistem Formal

C. S. Peirce (m.1914), seorang ahli falsafah dari Amerika Syarikat yang dikatakan banyak mempengaruhi pemikiran William James (m.1910) yang amat berpengaruh dan sering dianggap sebagai bapa falsafah aliran pragmatism, mengemukakan satu takrif bagi matematik yang diambilnya daripada bapanya sendiri, Benjamin Peirce (m.1880), yang merupakan seorang ahli matematik yang tersohor pada zamannya. Beliau mendefinisikan matematik sebagai satu “sains yang menghasilkan kesimpulan-kesimpulan wajib” atau “*a science that draws necessary conclusions*”.¹³ Dapat diperhatikan bagaimana takrif yang umum ini mempengaruhi pemikiran seorang lagi ahli falsafah yang amat berpengaruh, Bertrand Russell (m.1970), yang juga mengemukakan takrif yang hampir sama maksudnya tetapi dalam bentuk yang lebih kemas, iaitu matematik sebagai, *...the class of all propositions of the form “p implies q”, where p and q are propositions containing one or more variables, the same in the two propositions, and neither p nor q contains any constants except logical constants*¹⁴, dan di tempat yang lain takrif yang sama diungkapkan semula sebagai, “*Pure mathematics consists entirely of assertions to the effect that, if such and such a proposition is true of anything, then such and such another proposition is true of that thing.*”¹⁵

-
13. William Ewald, ed., *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, vol. 1 (New York: Oxford University Press, 1996) 632–648. Lihat juga James Newman, ed., *The World of Mathematics*, vol. 3 (New York: Simon and Schuster, 1956), 1767–1783.
 14. Takrif ini ada dinyatakan dalam *Principles of Mathematics*, terbit buat pertama kali pada tahun 1903. Takrif yang hampir sama juga ada dinyatakan dalam karya-karya beliau yang lain seperti *Mathematics and the Metaphysicians*, malah, keseluruhan *Principia Mathematica* yang ditulisnya bersama-sama dengan Alfred North Whitehead adalah semata-mata untuk mendemonstrasikan takrif ini. Lihat Bertrand Russell, *Principles of Mathematics* (Oxford: Rutledge Classics, 2010), 3.
 15. Lihat tulisan Russell, “Mathematics and the Metaphysicians” dalam *The World of Mathematics*, ed. James R. Newman, vol. 3 (New York: Simon and Schuster, 1956), 1576.

Takrif inilah yang menjadi batu asas kepada aliran falsafah matematik yang dikenali sebagai *logicism*, iaitu satu pandangan yang mendakwa bahawa hakikat matematik itu hanyalah semata-mata mantik. Fahaman ini juga amat berkait rapat dengan satu lagi aliran falsafah matematik yang boleh dikatakan sebagai lanjutan daripada aliran yang pertama tadi iaitu *formalism* yang dipelopori oleh David Hilbert (m.1943), iaitu satu pandangan yang mendakwa bahawa hakikat matematik itu hanyalah semata-mata suatu sistem formal.¹⁶ Kedua-dua aliran ini secara bersekali cenderung untuk dinamakan sebagai *nominalism*. Fahaman yang bersifat *nominalis* ini menganggap objek-objek matematik itu tidak benar-benar wujud dalam realiti, tetapi adalah himpunan nama-nama bersekali dengan takrif-takrif masing-masing. Kesepaduan nama dan takrif yang diberi hanyalah kesepakatan ahli-ahli matematik. Dengan kata lain, takrif tiada benar-salahnya, cuma ada takrif yang “baik” dan “berguna” dan ada takrif yang “tidak berguna”. Apabila takrif bagi objek-objek matematik itu telah ditetapkan, maka barulah penerokaan dan penaakulan selanjutnya boleh ditentukan benar-salahnya. Ini adalah berlawanan dengan aliran falsafah matematik yang dinamakan sebagai *Platonisme*. Kebanyakan ahli matematik boleh diandaikan berpegang kepada suatu falsafah matematik ini, sama ada mereka menyedarinya ataupun tidak. Ini berlaku apabila mereka menganggap objek-objek matematik kajian mereka itu benar-benar wujud, seperti yang selalu tergambar dalam pernyataan-pernyataan mereka yang selalu menggunapakai istilah “wujud”. Sekiranya mereka secara sedar menyatakan bahawa istilah “wujud” yang mereka gunakan itu hanyalah sebagai isyarat dan bukan semestinya bermakna wujud seperti wujudnya alam semesta ini, maka pemikiran mereka kembali kepada pemikiran *nominalis*. Namun sekiranya ditanyakan adakah objek-objek kajian mereka itu semata-mata khayalan dan tidak wujud sama sekali, kebanyakan

16. Stephan Körner, *The Philosophy of Mathematics* (New York: Dover, 1986).

mereka akan menafikannya juga. Oleh itu, kesimpulan yang munasabah untuk menggambarkan pemikiran falsafah ahli-ahli matematik secara umum ialah, bahawa mereka percaya kepada semacam *Platonisme* tetapi bekerja dan berinteraksi antara satu sama lain dalam kerangka *nominalisme*.

Natijah daripada pengenaaan takrif ini iaitu matematik sebagai logik dan sistem formal terhadap disiplin matematik amatlah besar bukan sahaja dalam disiplin ini sendiri tetapi juga disiplin-disiplin lain yang menggunakan matematik sebagai bahasa untuk mengungkapkan teori-teorinya. Dalam disiplin matematik itu sendiri, sekiranya kita menganggap matematik tidak lebih daripada satu sistem formal sepenuhnya, yang semata-mata berdasarkan aksiom-aksiom yang tertentu bersekali dengan hukum penaakulan yang tetap, maka ia akan menjadi tertakluk kepada Teorem Ketidaksempurnaan Gödel (*Gödel's Incompleteness Theorem*). Teorem ini menyatakan bahawa setiap sistem formal boleh jadi konsisten atau lengkap tetapi tidak mungkin kedua-duanya sekali. Matematik amat mementingkan ketekalan (konsisten) dan tidak akan menerima satu percanggahan sekalipun. Sekiranya ketekalan ini hendak dikekalkan, maka kita harus menerima bahawa akan ada pernyataan dalam satu-satu cabang (atau keseluruhan) matematik itu yang tidak dapat dibuktikan kesahihannya mahupun kepalsuannya selagi mana kita terus berpegang kepada aksiom yang sama. Ini bermakna adalah mustahil untuk kita mengetahui selengkapnya semua yang boleh diketahui dalam satu-satu cabang (atau keseluruhan) ilmu matematik ini. Namun, sekiranya kita berkeras untuk mengejar kelengkapan dan kesempurnaan, maka kita perlu menerima akan adanya percanggahan-percanggahan dalam bidang ilmu ini. Inilah had muktamad yang dimaksudkan oleh Gödel menerusi Teorem Ketidaksempurnaannya.

Teorem Ketidaksempurnaan Gödel ini mempunyai impak bukan sahaja ke atas bidang matematik, malah turut mempengaruhi perkembangan bidang-bidang ilmu lain yang menggunakan matematik sebagai bahasa untuk

mengungkapkan teori-teorinya, misalnya fizik dan ekonomi. Pada satu sisi, apabila matematik dianggap sebagai semata-mata alat atau medium untuk menjelaskan teori-teori tanpa matematik itu sendiri mempunyai apa-apa status ontologi yang jelas, anggapan sedemikian menatijahkan kepada penekanan yang lebih kepada aspek data empirikal yang menentukan teori matematik yang manakah yang lebih utama untuk digunakan, seperti yang dianjurkan oleh aliran falsafah positivisme mantiki (*logical positivism*). Pada sisi yang lain, anggapan tersebut juga mencetuskan keadaan yang mengakibatkan teori-teori yang saling bercanggah antara satu sama lain diterima dan diperbahaskan dalam “ruang awam” dengan harapan bahawa teori yang terbaik akan mendominasi dan menguasai “ruang awam” tersebut. Perkara ini lebih jelas terzahir pada bidang ekonomi moden, yang dalamnya begitu banyak teori besar yang menjelaskan perkara yang sama tetapi bercanggah antara satu sama lain walaupun dalam keadaan hampir semua entiti ekonomi telah dimatematikan dan diunitkan secara abstrak dengan data yang diambil secara sistematik dan terperinci. Tambah merumitkan lagi, polisi atau keputusan yang dibuat berdasarkan teori-teori tertentu tadi akan mempengaruhi pula ekonomi yang cuba difahami itu, yang mengakibatkan keperluan berterus terhadap penghasilan teori-teori baharu dari semasa ke semasa.

Matematik digunakan sebagai bahasa untuk mengungkapkan teori sains kerana sifat objektif dan konsisten yang tidak berbelah bahagi yang ada pada matematik. Namun, sifat yang sama inilah yang, apabila dilanjutkan kepada kesimpulan akhirnya, menatijahkan hilangnya sifat objektif tadi sehingga menjadi subjektif dan relatif.

Matematik sebagai Sains Kuantiti dan Struktur

Meskipun ahli-ahli matematik keseluruhannya boleh dikatakan bekerja dalam kerangka nominalisme, kebanyakan mereka tidak juga selesa dengan anggapan bahawa objek-objek

matematik adalah semata-mata rupacita dan khayalan. Sudah tentu, mereka menganggap objek-objek tersebut mempunyai realitinya yang tersendiri. Namun, mereka juga tidak selesa apabila digelar sebagai platonis. Hal ini dibincangkan dengan panjang lebar oleh James Franklin dalam karyanya yang diterbitkan pada tahun 2014 yang berjudul “*An Aristotelian Realist Philosophy of Mathematics: Mathematics as the Science of Quantity and Structure.*”¹⁷ Dalam buku ini, Franklin mempertahankan takrif asal bagi matematik sebagai sains kuantiti.

Takrif matematik yang dikemukakan oleh Aristotle (m.322 S.M.) sebagai sains kuantiti (*the science of quantity*) ini boleh dikatakan sebagai takrif yang terawal dalam sejarah dan masih dirujuk secara meluas. Takrif yang mudah seperti ini pun sudah mampu mengundang perbincangan yang memakan masa ribuan tahun. Hal ini mungkin kerana takrif ini boleh difahami dalam beberapa darjah kefahaman yang berbeza. Pada darjah kefahaman yang paling umum, sains kuantiti ini difahami sebagai pengetahuan mengenai nombor, angka, dan nilai. Namun, seorang yang peka akan sejarah matematik tentu menyedari bahawa sekurang-kurangnya pada zaman peradaban Yunani matematik dapat dibahagikan kepada dua bidang iaitu aritmetik dan geometri. Sains kuantiti sekiranya difahami sebagai pengetahuan mengenai nombor dan angka hanyalah kena pada disiplin aritmetik. Harus difahami juga bahawa kajian mengenai pemikiran Aristotle juga adalah satu bidang yang amat luas, yang keberadaannya sudah lama, dan telah menerbitkan begitu banyak interpretasi falsafah Aristotle yang begitu rencam. Pemahaman kita terhadap pemikiran Aristotle di sini telah tersadur oleh pemahaman para sarjana pemikiran Aristotle, misalnya Richard McKeon (m.1985) dan lain-lain.¹⁸

17. James Franklin, *An Aristotelian Realist Philosophy of Mathematics* (Hampshire: Pelgrave Macmillan, 2014).

18. Richard McKeon, ed., *The Basic Works of Aristotle* (New York: The Modern Library, 2001).

Salah satu daripada sepuluh kategori dalam dalam mantik Aristotle, yang juga dikenali dengan nama *al-maqūlāt al-‘asharāh* ialah “kuantiti” atau *kammiyyah*. Menurut Aristotle, kuantiti terbahagi kepada dua iaitu kuantiti diskret dan kuantiti selanjar. Contoh-contoh bagi kuantiti diskret ialah bilangan dan angka manakala contoh bagi kuantiti selanjar ialah objek-objek seperti garis lurus dan lengkung. Maka, sekiranya kita takrifkan “sains” di sini sebagai “pengetahuan secara bersistem”, maka “matematik” sebagai “sains kuantiti” bolehlah difahami sebagai “pengetahuan secara bersistem mengenai objek-objek kuantitatif seperti angka, bilangan, garis, lengkung, dan sebagainya.” Namun, pemahaman pada peringkat ini juga hanya benar pada ruang lingkup pengkajian matematik yang asas. Bagi meliputi keseluruhan skop pengkajian matematik pada peringkat yang paling tinggi dan dalam, takrif yang diberi oleh Aristotle ini seharusnya difahami sebagai “sains kuantiti dan struktur” (*the science of quantity and structure*). Hal inilah yang dibincangkan dengan panjang lebar oleh James Franklin dalam karyanya yang disebutkan tadi.

Menurut Franklin, matematik sebagai “sains kuantiti” hanya menangkap makna matematik asas yang tidak merangkumi keseluruhan aktiviti matematik yang lebih mutakhir. Franklin mengusulkan dan mempertahankan sejenis realisme dalam matematik sebagai jawapan kepada mazhab-mazhab platonisme dan nominalisme. Secara ringkasnya, Franklin menghujahkan bahawa objek-objek matematik adalah real atau mempunyai kedudukan ontologi yang jelas. Ini bermakna, objek-objek ini benar-benar wujud. Namun, kewujudannya bukanlah dalam satu alam ideal seperti yang dikemukakan oleh Plato dan mazhab falsafahnya, tetapi berakar umbi daripada kewujudan luaran yang sudah sedia diakui kewujudannya. Berkenaan persoalan bahawa objek-objek matematik bersifat sempurna ketepatannya sedangkan objek-objek luaran (fizikal) tidak sempurna, Franklin menjawab, kesempurnaan objek-objek matematik itu menghampiri ketidaksempurnaan objek-objek luaran,

cuma untuk memudahkan penghujahan matematik objek yang sempurna itu yang dipertimbangkan. Masalah kita adalah apabila kita menggunakan perkataan “sempurna” itu, kita sudah mempunyai tanggapan atau praandaian tentang apa yang difahami sebagai sempurna, yang tidak semestinya perlu difahami dengan makna sedemikian. Dengan cara ini, Franklin berjaya menafikan kedua-dua fahaman. Kita faham bahawa objek matematik wujud sebagai objek dalam alam ideal (platonis) dan juga fahaman yang mengatakan objek matematik hanyalah wujud pada simbol dan hukum manipulasi simbol (nominalis).

Matematik = Ontologi

Ini sememangnya satu dakwaan yang besar. Karya Being and Event yang dalamnya Alain Badiou (1937–) mengusulkan takrifan ini sendiri adalah satu karya yang tidak mudah untuk dijelaskan. Badiou sendiri, sebagai seorang ahli falsafah continental tidak pernah cuba merasionalkan sepenuhnya apa-apa dakwaannya; apa yang penting baginya adalah keberhasilan seorang ahli falsafah itu dalam memecahkan kebuntuan dengan mengusulkan sesuatu yang baru dan radikal dengan meyakinkan. Beliau yakin bahawa ilmu falsafah akan mengambil bentuk matematik dalam masa yang terdekat ini.

Seorang sarjana tempatan, Burhanuddin Baki menerusi karyanya *Badiou's Being and Event and the Mathematics of Set Theory* merasionalkan hujah-hujah Badiou berdasarkan teori set dalam matematik.¹⁹ Semenjak awal abad ke-20, ahli-ahli matematik dan falsafah di Eropah telah banyak menghabiskan masa dan tenaga akhiah mereka demi menjelaskan asas-asas binaan matematik atau *the foundations of mathematics* yang dipermasalahkan ketika itu. Ahli-ahli matematik

19. Burhanuddin Baki, *Badiou's Being and Event and the Mathematics of Set Theory* (London: Bloomsbury Academic, 2015). Hampir semua yang dinyatakan dalam bahagian *Matematik=Ontologi* ini merupakan ringkasan Bab 1 buku yang dikarang oleh Dr. Burhanuddin Baki ini.

seperti Bertrand Russell dan Frege yang pemikiran mereka ada dibincangkan secara ringkas tadi mendakwa bahawa asas binaan matematik ialah teori set. Teori set dianggap sebagai sesuatu yang amat asas, sehinggakan semua struktur lain seperti yang berbentuk operasi seumpama fungsi, transformasi, pemetaan, dan lain-lainnya semuanya terbina oleh set. Daripada set, “sama” atau “berbeza”nya sesuatu itu dengan yang lain dapat ditakrifkan dengan tepat. Sukar untuk membayangkan sesuatu yang lebih asas daripada set, yang di“takrif”kan sebagai “himpunan sesuatu objek”.

Namun, semua itu berubah dengan munculnya apa yang dikenali sebagai Teori Kategori. Walaupun pada asalnya teori kategori ini muncul dalam pengkajian topologi aljabar (yang juga terbina daripada teori set) sebagai kajian terhadap “apa” yang meng“kekal”kan “struktur”, iaitu apa yang dipanggil sebagai “morphism” idea ini kemudiannya diambil sebagai sesuatu yang lebih asas daripada set. Dalam teori kategori, pemuka-pemuka teori kategori seperti Alexander Grothendieck (1928–2014) dan Alain Badiou sendiri menentang bahawa dengan mengambil morphism yang diwakili oleh titik-titik dan anak-anak panah sebagai titik permulaan berfikir, objek-objek matematik lain termasuklah set dan apa yang terbina daripadanya boleh dibina semula. Oleh itu, apakah morphism ini mestilah lebih asas daripada set? Namun, besar kemungkinan, Badiou sendiri tidak mengambil peduli yang manakah yang lebih asas, kerana sewajarnya baginya telah jelas bahawa persoalan “asas-asas binaan” ini adalah persoalan palsu yang hampa makna, kerana apa yang kita gelarkan sebagai “asas” itu, malah rasa ingin tahu kita terhadap “asas” itu tadi, terbina atas “asas-asas” yang lain pula, yang berubah-ubah dan meledak-ledak.

Ontologi, menurut Badiou, adalah bebas daripada semua ini. Ia bebas daripada apa sahaja yang mengekangnya dari “luar”. Ia tidak memerlukan maklumat-maklumat baru dari luar, atau persoalan-persoalan baru dari luar, ia menjelaskan dirinya sendiri. Ia berdiri dengan mengasingkan dirinya

daripada sebarang perumpamaan atau perwakilan. Namun, apabila “ledakan” berlaku dalam mana-mana daripada empat domain (sains, falsafah, seni, dan cinta), ontologi mampu menjelaskannya tanpa ia tertakluk kepadanya. Semua ini menurut Badiou, adalah sama, dengan matematik. Matematik tidak memerlukan apa sahaja selain daripada matematik sendiri untuk menjelaskan dirinya. Namun ia berupaya pula menjelaskan hal-hal di luar daripada dirinya. Ini secara tidak langsung menjelaskan sedikit sebanyak apa yang disebut oleh Eugene Wigner sebagai *unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*.

Penting untuk dijelaskan di sini bahawa bagi Badiou (dan cara-gaya falsafah yang digelar continental) pentakrifan bukanlah satu usaha untuk mengenal apa itu (atau *māhiyyah*) sesuatu objek, tetapi adalah satu “penetapan” atau *prescription* kepada sesuatu objek. Maka, dalam perbuatan mentakrifkan sesuatu, kita sebenarnya sedang menetapkan sesuatu itu seperti yang kita kehendaki, kemudian kita telusuri pula apakah perubahan-perubahan yang mendasar hasil daripada pentakrifan tadi, dan sama ada ia memberikan suatu perspektif yang baharu.

Matematik sebagai Latihan Akliah

Takrif matematik sebagai latihan akliah ini tergambar dengan jelas dalam istilah yang digunakan dalam bahasa Arab untuk merujuk kepada matematik, iaitu *riyādiyyāt*. Dalam takrif ini, matematik lebih dilihat sebagai alat atau instrumen untuk mencapai perkara yang lain. Matematik di sini tidak dilihat sebagai menggambarkan realiti, tetapi sebagai satu lapangan akliah yang dalamnya proses penaakulan ilmiah dapat dibuat ke atas objek-objek abstrak sebagai persediaan sebelum proses penaakulan ini dibuat terhadap objek-objek nyata yang lebih rumit.

Matematik dan Keyakinan

Dalam *al-Munqidh min al-Dalāl*, al-Imām al-Ghazālī menceritakan perihal seorang ahli sihir yang pandai menukarkan batang kayu menjadi ular. Betapa hebatnya ahli sihir itu dan betapa terpesonanya kita melihat pertunjukannya, kita tidak akan percaya sekiranya ahli sihir yang sama mendakwa kepada kita bahawa $2+2$ ialah 5, atau 3 lebih besar daripada 10! Itulah gambaran tahap keyakinan kita terhadap pernyataan-pernyataan matematik. Malah, inilah yang mentakrifkan kedudukan *yaqīn*, iaitu kita mengetahui dengan pasti akan kebenaran sesuatu dan dengan pasti menolak kenyataan sebaliknya atau yang bercanggah dengannya. Ini berbeza dengan kedudukan-kedudukan yang lain seperti *zann*, *shakk*, dan *wahm*. Walaupun contoh yang dikemukakan di atas tadi hanyalah satu contoh aritmetik yang mudah, namun disiplin matematik secara tradisinya meletakkan syarat darjah keyakinan yang sama untuk semua pernyataan dalam matematik termasuklah pernyataan-pernyataan yang bersifat umum seperti “untuk sebarang segitiga tegak yang sisi-sisinya diwakili oleh a , b , dan c , maka $a^2+b^2=c^2$ ”. Apabila sesuatu pernyataan yang bersifat umum itu terbukti kebenarannya, maka ia dinamakan sebagai teorem. Secara mudahnya, boleh dikatakan bahawa rencana penyelidikan dalam matematik tulen ialah menerbitkan dan terus menerbitkan teorem-teorem dalam semua cabang matematik. Matematik yang seumpama ini sudah sekian lama difahami mungkin semenjak Euclid dan mungkin lebih awal lagi, dan tidak sedikit ilmuwan Islām turut terlibat dalam rencana penyelidikan ini yang sudah berjalan selama ribuan tahun.

Walaupun begitu, al-Ghazālī mengingatkan kita dalam kitab yang sama, bahawa hanya semata-mata kerana pernyataan matematik itu meyakinkan tidaklah bermakna pernyataan yang bukan matematik itu tidak mungkin mencapai darjah *yaqīn* seperti ini! Bahkan, banyak kenyataan di luar kenyataan matematik yang juga bersifat *yaqīn*, malah

mempunyai darjah keyakinan yang lebih tinggi lagi. Inilah kesilapan besar segelintir ahli falsafah yang merasa begitu takjub dengan matematik dan logik kerana darjah keyakinan yang diberikannya sehinggakan menafikan semua dakwaan yang datang dari luar kedua-dua cabang ilmu ini, ataupun, meletakkan syarat bahawa sebarang dakwaan mengenai kebenaran mestilah diungkapkan menerusi kedua-dua cabang ilmu ini.²⁰ Sikap reduksionistik seumpama ini dikritik oleh al-Ghazālī hampir seribu tahun yang lalu.

Namun begitu, tanpa menafikan adanya kenyataan yang di luar ruang lingkup matematik yang mampu menghasilkan keyakinan yang setara atau lebih, matematik dan disiplin-disiplin yang dibina di atas landasannya telah berfungsi sebagai penanda aras ilmu yang boleh disandarkan kebenarannya. Ini amat nyata sekali dalam sains moden di mana semenjak zaman Galileo Galilei, matematik telah diangkat sebagai bahasa untuk mengungkapkan teori-teori mengenai fenomena alam tabii, dan sifat inilah yang menjadi salah satu ciri utama sains moden. Kedudukan matematik menjadi semakin dihormati apabila menerusinya penemuan-penemuan baharu dalam bidang fizik atau sains tabii keseluruhannya tercetus daripada sifat matematiknya sains tersebut sehinggakan Eugene Wigner menggelarkannya sebagai *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*.²¹ Kemudiannya, disiplin-disiplin kemanusiaan pula mula mengikut jejak langkah sains tabii dengan turut menggunakan matematik sebagai bahasa untuk mengungkapkan teori-teorinya sehingga tercetuslah apa yang digelar “sains sosial”. Akhirnya, sifat matematik sesuatu disiplin itu menjadi salah satu ciri utama yang membezakan disiplin yang bersifat saintifik daripada disiplin yang tidak bersifat saintifik. Kini menjadi satu lumrah orang menganggap

20. Seperti yang telah dibincangkan dalam bahagian 2.3 di atas Bertrand Russell mentakrifkan matematik sebagai hanyalah semata-mata logik.

21. Eugene Wigner, “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences,” *Communications in Pure and Applied Mathematics* 13, no. 1 (Feb 1960).

ilmu yang bersifat saintifik itu ilmu yang meyakinkan sedangkan ilmu yang tidak bersifat saintifik itu iaitu ilmu yang meragukan, tanpa menyedari dengan sepenuhnya apa yang dimaksudkan dengan istilah “saintifik” tadi! Maka, sikap reduksionistik yang dikritik al-Imām al-Ghazālī itu kembali berleluasa dalam bentuk yang lebih canggih.

Dalam membicarakan mengenai darjat keyakinan, kita boleh menggunakan kerangka yang dibangunkan oleh al-Ghazali seperti yang dihuraikan oleh Mohd. Zaidi Ismail dalam makalahnya *Logic in al-Ghazālī's Theory of Certitude*.²² Al-Ghazali membahagikan darjat keyakinan kepada dua bahagian: positif dan negatif. Darjat yang paling rendah dalam bahagian negatif ialah *shakk* iaitu keadaan seseorang yang tidak dapat menentukan sama ada sesuatu pernyataan atau dakwaan itu benar atau sebaliknya serta tidak ada sebarang kecenderungan dalam dirinya untuk lebih menerimanya sebagai benar atau sebaliknya. Darjat yang lebih tinggi daripada itu ialah *ẓann* iaitu keadaan seseorang yang cenderung untuk menerima sesuatu pernyataan atau dakwaan itu sebagai benar tetapi masih tidak dapat menafikan kemungkinan bahawa ianya palsu. Darjat yang jauh lebih tinggi daripada semua itu ialah *maqam yaqīn* iaitu keadaan seseorang yang menerima sesuatu pernyataan atau dakwaan itu sebagai benar sekaligus menafikan apa sahaja kemungkinan sekalipun bahawa ianya palsu. Darjah *yaqīn* inilah yang sebenar-benarnya mentakrifkan keyakinan. Namun begitu, ia masih lagi dalam kategori negatif dalam pembahagian darjat keyakinan tadi. Ini kerana keyakinan yang dicapai pada peringkat ini boleh dicapai melalui dua cara. Pertama dengan cara pembuktian; dan kedua dengan cara *taqlīd*.

Kedua-dua cara tersebut, pembuktian (atau *burhān* atau *tahqīq*) dan ikutan (atau *taqlīd* atau sandaran kepada autoriti), adalah dua cara yang langsung berbeza antara satu sama lain

22. Mohd. Zaidi Ismail, “Logic in Al-Ghazālī’s Theory of Certitude,” *Al-Shajarah* 1, no. 1&2 (1996): 95–125.

namun kedua-duanya menghasilkan keyakinan yang memenuhi takrif tadi. Salah satunya mempunyai kecenderungan untuk jatuh ke darjat yang lebih bawah manakala yang satu lagi mempunyai kecenderungan untuk meningkat naik ke darjat keyakinan yang lebih tinggi iaitu dalam kategori positif.

Matematik sebagai satu disiplin ilmu meletakkan keyakinan seperti ini sebagai tanda aras yang perlu dicapai oleh sebarang pernyataan atau dakwaan. Sekiranya kita menggunakan takrif matematik sebagai sistem formal (sama ada takrifan Russell atau Hilbert), iaitu suatu sistem yang terdiri daripada pernyataan-pernyataan *badīhī* atau a priori serta pernyataan-pernyataan yang terbit sebagai natijah-natijah kepada pernyataan-pernyataan *badīhī* tadi menerusi sistem silogisme yang tertentu atau *qiyās*, maka kita dapat meletakkan pernyataan-pernyataan matematik sebagai termasuk dalam kategori *yaqīn*.

Namun begitu, tidak semua ahli matematik menganggap bahawa takrifan Russell dan Hilbert itu merangkumi keseluruhan matematik dan aktiviti bermatematik. Misalnya, Timothy Gowers menyatakan dalam prakata kepada *The Princeton Companion to Mathematics*, setelah beliau memetik takrifan matematik yang diberikan oleh Russell, bahawa buku tersebut mengandungi apa yang di luar daripada takrif tersebut.²³ Hal ini dapat difahami apabila kita menyedari bahawa bukan semua yang dinamakan aksiom itu adalah pernyataan *badīhī* dalam erti kata yang sebenar. Kebanyakannya adalah takrif yang dibuat atau dibina berdasarkan intuisi tertentu atau motivasi tertentu. Hal ini tergambar daripada takrif-takrif bagi matematik yang lain seperti yang diutarakan oleh Aristotle dan dikembangkan oleh Franklin bahawa matematik adalah pembinaan struktur, misalnya. Maka, aktiviti bermatematik yang lebih utama ialah proses pembinaan takrifan-takrifan yang menjadi sistem aksiom itu tadi. Satu persoalan timbul

23. Timothy Gowers, ed., *The Princeton Companion to Mathematics* (New Jersey: Princeton University Press, 2008), ix.

di sini: Adakah pernyataan-pernyataan yang di “luar” takrifan formalistik Hilbert dan Russell itu masih lagi termasuk dalam kategori *yaqīn*? Jawapan secara sepintas-lalu yang boleh dinyatakan di sini adalah, ya, ia masih berada dalam kategori *yaqīn* selama mana proses pembinaan itu menuruti satu kerangka asas yang jelas. Dalam perbincangan mengenai kerangka asas dalam matematik ini terdapat dua kerangka asas yang digunakan: 1) Teori set; dan 2) Teori kategori.

Namun, persoalan lain pula timbul dan persoalan ini adalah yang lebih penting dan utama: Sekiranya keseluruhan pernyataan dan dakwaan dalam matematik itu adalah pembinaan akliyah, maka apakah status kewujudannya atau ontologinya? Adakah objek-objek abstrak yang dibina itu wujud? Bagaimanakah pernyataan-pernyataan mengenai objek-objek yang status kewujudannya belum dapat dipastikan ini boleh termasuk dalam kategori *yaqīn*? Apabila suatu objek X dikatakan mempunyai sifat P, bagaimanakah kita boleh mencapai keyakinan akan kebenaran pernyataan ini apabila status kewujudan X itu sendiri belum ditentukan? Tidakkah *yaqīn* yang dimaksudkan di sini mestilah ada hubungannya dengan *haqīqah* atau realiti? Jawapan kepada persoalan-persoalan ini akan dibincangkan dengan lebih lanjut dalam bahagian yang seterusnya di bawah. Namun, sebahagian daripada persoalan ini juga ada hubung-kaitnya dengan bahagian yang kedua daripada darjat keyakinan menurut kerangka yang dikemukakan oleh al-Ghazālī iaitu bahagian positif.

Berbeza dengan bahagian negatif yang menafikan *shakk* dan *ẓann* itu sebagai sebahagian keyakinan, bahagian darjat keyakinan yang positif ini sesungguhnya darjat keyakinan kerana kesemuanya termasuk dalam kategori *yaqīn*. Yang membezakan antara pelbagai darjat ini hanyalah jenis dan kekuatan keyakinan yang dicapai. Darjat keyakinan yang dimaksudkan di sini termasuklah *dhawq*, *mukāshafah*, dan *mushāhadah*, di mana seseorang itu mengalami sendiri hakikat yang dikenalnya, dibukakan hijab yang menghalangnya

daripada mengenali hakikat tersebut sehingga dia menyaksikan sendiri hakikat itu tanpa perlu melalui jalan *istidlal* dan penaakulan. Pada peringkat ini, matematik tidak lagi memainkan peranan dalam menambah atau mengurangkan keyakinan. Tangga *mantiq* dan *qiyās* sudah tidak lagi diperlukan untuk mendaki ke darjat keyakinan yang lebih tinggi. Apabila kita mula membicarakan darjat keyakinan seperti ini, maka perbincangan ontologi iaitu persoalan mengenai kewujudan, jenis-jenis, status, dan *marātibnya* tidak dapat lagi dilakukan.

Oleh itu, untuk kita membahaskan dan menyelesaikan dilema falsafah matematik mutakhir, kita tidak boleh menghadkan perbincangan ini kepada matematik sebagai disiplin ilmu semata-mata, sebagai *al-‘ulūm al-mudawwanah*, tetapi kita perlu mengambil kira aspek psikologi dan rohani. Apatah lagi, keyakinan, pada hakikatnya adalah keadaan hal psikologi dan bukan suatu rumusan yang boleh ditulis sebagai teorem di atas kertas. Dimensi psikologi-rohani ini yang akan menentukan perbincangan perihal apa yang kita terima sebagai *badhiyyat* atau *a priori*. Sekiranya kita menghadkannya juga seperti yang berlaku dalam tradisi perbincangan Barat, maka kita perlu menerima, buat masa ini, pemikiran Alain Badiou sebagai kemuncak pencapaian perbincangan ini. Namun, kekhawatiran timbul sama ada Badiou sebenarnya menaiktaraf matematik menjadi ontologi, ataupun beliau sebenarnya telah merendahkan ontologi kepada matematik. Bagi kita yang menganggap perbincangan ontologi sebagai penting dan serius, bahawa ia adalah perbincangan mengenai hakikat, perbincangan mengenai apa yang sebenar-benarnya wujud, maka merendahkan sesuatu yang merangkumi pengalaman psikologi-rohani ini kepada teorem-teorem yang boleh diungkapkan atas kertas, yang mempunyai kecenderungan pula untuk diturun lagi tarafnya menjadi sesuatu yang bersifat nominalis semata-mata, sebagai nama tanpa hakikat, maka kekhawatiran ini perlu dileraikan segera.

Matematik dan Realiti

Persoalan mengenai apakah yang dimaksudkan dengan “realiti” telah disentuh secara sepintas lalu tadi di awal makalah ini. Di situ telah disebutkan bahawa kita memaksudkan realiti sebagai *ḥaqīqah* dan kalimah ini membawa kita kepada kalimah *al-Ḥaqq*. Perbincangan mengenai hubungan antara matematik dan realiti sebenarnya adalah perbincangan mengenai status ontologi objek-objek matematik itu sendiri. Perbincangan mengenai status ontologi ini tidak dapat dilakukan tanpa kita menggunakan kerangka ontologi yang tertentu. Antara kerangka yang boleh diketengahkan di sini adalah darjat kewujudan atau *marātib al-wujūd*. Untuk mencapai tujuan kita sekadar makalah ini, maka kita menggunakan kerangka ontologi yang dikemukakan oleh Shaykh ‘Abdullāh b. Husayn b. ‘Alī Makkī al-Ḥusnī al-‘Ajalānī seperti yang khabarkan kepada kita dalam *Latā’if al-Asrār li-ahl Allāh al-‘Abyār* karangan Shaykh Nūr al-Dīn al-Rānīrī, yang menyatakan lima jenis atau martabat kewujudan iaitu: 1) *wujūd dhātī*; 2) *wujūd ‘aynī*; 3) *wujūd dhihnī*; 4) *wujūd lafzī*; dan 5) *wujūd khattī*.²⁴ Antara kelima-lima jenis atau martabat kewujudan ini, *wujūd dhātī* adalah khusus bagi Allāh SWT semata-mata, sementara *wujūd ‘aynī* pula adalah khusus bagi makhluk. Sementara itu, *wujūd dhihnī*, *wujūd lafzī*, dan *wujūd khattī* adalah mungkin bagi Allāh SWT dan bagi makhluk.²⁵

Wujūd dhihnī adalah status kewujudan objek-objek akliyah, atau konsep-konsep, faham-faham, atau idea-idea yang wujud secara abstrak dalam akal insan. Misalnya, seorang yang melihat seekor rusa akan secara langsung membentuk konsep rusa dalam akalnya. Dalam akalnya akan ada tergambar suatu idea atau *ṣūrah* rusa itu yang merujuk kepada rusa secara

24. Muhammad Zainiy Uthman, *Latā’if al-Asrār li-Ahl Allāh al-‘Abyār of Nūr al-Dīn al-Rānīrī: An Annotated Transliteration together with a Translation and an Introduction of His Exposition on the Fundamental Aspects of Sūfī Doctrines* (Kuala Lumpur: Penerbit UTM Press, 2011), 199.

25. Ibid.

umum dan tidak hanya seekor rusa yang terlihat di hadapan matanya. Keupayaan ini membolehkan dia mengenal rusa-rusa lain apabila ia menjumpainya. Keupayaan ini juga membolehkan dia membezakan antara rusa dan bukan rusa. Konsep atau *ṣūrah* rusa ini wujud dalam kategori *wujūd dhihnī*. Seekor rusa yang sebenar yang dilihat olehnya tadi itu, yang berada di “luar” akalinya itu wujud dalam kategori *wujūd ‘aynī*.

Kemudian apabila orang itu ingin menjelaskan rusa kepada orang lain, terutama orang lain yang tidak pernah melihat rusa, maka dia harus menjelaskannya menerusi pertuturan bahasa lisannya. Bagaimana dia cuba menjelaskan dengan selengkapnya pun tiadakan dapat ia mencapai ketepatan seperti apa yang berada dalam fikirannya. Lebih-lebih lagi, hakikat rusa itu bukanlah sekadar “rupa” seekor rusa yang disaksikannya itu, tetapi merangkumi keseluruhan sifat-sifat yang ada pada rusa itu termasuklah perangainya dan tabiatnya. Walaupun orang itu sudah lama mendampingi rusa dan “mengenal” dengan benar akan segala sifat dan perangai rusa, namun kata-kata yang boleh diungkapkannya hanyalah sekadar apa yang dapat diungkapkannya menerusi bahasa yang digunakannya, dan bukan keseluruhan hakikat rusa itu.

Kemudian, apabila orang itu ditanya dengan lebih lanjut mengenai rusa: apakah rusa itu mesti bertanduk; apakah tanduk rusa itu mesti berbentuk dengan bentuk yang tertentu; apakah warna-warna yang mungkin bagi kulit rusa; bolehkah rusa mempunyai kulit berbelang-belang; dan berbagai-bagai soalan yang rinci. Maka pakar rusa tadi mungkin perlu membuat kajian saintifik mengenai spesis rusa dan kedudukan spesis rusa berbanding spesis-spesis haiwan lain yang berada dalam famili yang sama, misalnya, struktur DNA rusa, penyakit-penyakit rusa, dan yang sebagainya dengan penuh rinci dan secara sistematik, seterusnya mendokumentasikan hasil penyelidikannya dalam bentuk penulisan. Maka pada takat ini, kewujudan rusa itu tadi sudah berada dalam kategori *wujūd khattī*, iaitu kewujudan dalam bentuk penulisan. Pada tahap ini, penulisan yang begitu panjang dan rinci diperlukan

untuk menjelaskan “hakikat rusa” yang walaupun serinci dan selengkap manapun penulisan itu dibuat, ia tidak juga dapat menjelaskan rusa itu selengkapnya. Malah, ada sifat rusa yang dapat dijelaskan menerusi lisan (*wujūd lafẓī*) namun tidak dapat dijelaskan menerusi penulisan (*wujūd khattī*), misalnya bunyi rusa itu dan makna-makna di sebalik bunyi-bunyi yang dihasilkan.

Jelas di sini bahawa semakin tahap kewujudan sesuatu itu beralih daripada *wujūd ‘aynī* ke *wujūd lafẓī* ke *wujūd khattī*, maka semakin samar hakikat perkara yang ingin dijelaskan itu walaupun semakin berupaya untuk hakikat itu direkodkan dan dikomunikasikan. Di sini kita ingin menumpukan kepada matematik sebagai “bahasa bagi mengungkapkan hakikat mengenai sesuatu”. Ini kerana, sains moden sememangnya dicirikan oleh matematik “bahasa” bagi mengungkapkan teori-teorinya. Maka persoalan yang boleh diutarakan di sini ialah dalam kategori kewujudan yang manakah letaknya objek-objek matematik?

Secara sepintas lalu, kita menyedari bahawa objek-objek matematik adalah objek-objek akliyah atau *ma‘qūlāt*. Ia merupakan konsep-konsep atau faham-faham yang “tertakrif”. Menelusuri takrif-takrif matematik yang dikemukakan dan dibincangkan di awal makalah ini tadi, kita mendapati bahawa objek-objek matematik bukanlah semata-mata objek akliyah. Kerana terdapat banyak objek-objek akliyah yang tidak memenuhi ciri-ciri yang menyebabkan ia diterima sebagai objek matematik. Misalnya, konsep “rusa” tadi tidak dianggap sebagai objek matematik sedangkan “segitiga” ialah objek matematik, walaupun kedua-duanya berada pada *wujūd dhihni*. Beza antara kedua-dua objek ini adalah bahawa konsep “segitiga” sudah sememangnya difahami sebagai tertakrif (tiga titik yang tidak segaris yang dihubungkan antara satu sama lain dengan garis-garis lurus yang dinamakan sisi) sedangkan rusa ialah, misalnya, “haiwan berkaki empat yang spesies jantannya bertanduk cabang”. Rusa tidak dapat ditakrifkan dengan cara yang sama (sekurang-kurangnya tidak dengan mudah). Bertitik

tolak daripada objek-objek geometri asas seperti titik dan garis, objek-objek aljabar seperti pembolehubah dan pemalar, serta operasi-operasi yang tertakrif sebagai gabungan set-set objek-objek geometri dan aljabar tadi, maka keseluruhan binaan matematik dibangunkan sehingga menghasilkan teorem-teorem atau pernyataan-pernyataan yang benar mengenai binaan tadi. Binaan ini akhirnya digunakan untuk menjelaskan sama ada fenomena yang berlaku dalam alam tabii atau fenomena yang berlaku dalam alam kemanusiaan seperti struktur dalam bahasa insan, struktur dalam kegiatan ekonomi dan sosial insan. Binaan ini juga digunakan untuk membangunkan sistem-sistem yang akhirnya digunakan untuk kemaslahatan insan seperti sistem perisian komputer, sistem elektronik, sistem pentadbiran dalam pelbagai bidang, dan lain-lain. Maka, kita menyedari bahawa objek-objek matematik bukanlah semata-mata objek akliyah yang berada pada *wujūd dhihnī*, tetapi ada hubungannya pula dengan takrif-takrif yang membezakannya dengan objek-objek dhihnī yang lain. Takrif-takrif ini dan pembinaan matematik yang seterusnya dilakukan pada tahap *wujūd khattī* kerana setiap objek akan diwakili oleh simbol, dan takrif bagi simbol-simbol ini yang menentukan bagaimana ia dihubungkan dengan simbol-simbol lain yang mewakili objek-objek *dhihnī* yang lain, inilah yang menjadi ciri utama objek matematik.

Setakat ini kita sudah menentukan bahawa objek matematik ialah objek akliyah dan berada pada kategori *wujūd dhihnī* yang ditakrifkan menerusi takrif-takrif yang menghubungkan simbol-simbol yang berada pada kategori *wujūd khattī*. Takrif matematik sebagai sistem formal oleh David Hilbert dan juga takrif matematik sebagai sistem logik simbolik oleh Russell menumpukan kepada aspek *wujūd khattī* tadi. Walaupun, objek-objek matematik ini terhasil melalui “pembinaan” yang didahului oleh pembinaan takrif-takrif dan kemudiannya *qiyās* dan penaakulan, namun asas pembinaannya masih berakar-umbikan pengalaman insan serta ilham yang ada padanya. Sejauh mana sesuatu pembinaan matematik itu

melambangkan hakikat sesuatu bergantung pada nilai yang datang daripada luar matematik itu sendiri. Mungkin apa yang dikatakan oleh Alain Badiou sebagai “matematik=ontologi” itu membayangkan bahawa matematik menangkap aspek yang tertentu daripada realiti, dan bukan sebenarnya ontologi seperti yang kita fahami. Pernyataan-pernyataan matematik membayangkan aspek tertentu ini pada tahap *wujūd khattī* yang akhirnya menjelaskan aspek-aspek tersebut yang berasal daripada *wujūd ‘aynī* sesuatu makhluk atau fenomena alam yang tertentu. Memandangkan ia dapat diungkapkan secara tertakrif pada tahap *wujūd khattī* maka manipulasi-manipulasi yang tertentu dapat dijalankan dengan mudah dan sistematik, dan inilah yang menerbitkan sains moden. Ini adalah kerana fenomena alam pada hakikatnya adalah *āyāt* atau tanda-tanda atau *āthār* bagi *af‘āl* Allāh SWT, yang merupakan bayangan daripada sifat-sifat-Nya yang Agung, maka matematik boleh disifatkan sebagai satu wasilah kepada penzahiran Sifat-Sifat-Nya yang tertentu. Namun, harus ditekankan sekali lagi bahawa matematik itu sendiri tidak dapat menentukan sama ada pernyataan dan dakwaan yang dihasilkannya itu hampir atau berbetulan dengan realiti ataupun Sifat yang ingin dizahirkannya itu.

Kesimpulan

Dalam makalah ini kita telah menelusuri beberapa takrif bagi ilmu matematik serta bagaimana harus kita memahami takrif-takrif yang pelbagai ini sebagai membayangkan sifat yang tertentu yang ada pada matematik. Seterusnya, kita telah membuat analisis terhadap status ontologi matematik dalam kerangka *marātib al-wujūd* yang lima, yang membolehkan kita meletakkan objek matematik sebagai objek akliyah yang berstatus *wujūd dhihni* namun terbina menerusi sistem pentakrifan yang berasaskan kepada simbol-simbol yang berstatus *wujūd khattī*. Berdasarkan kepada analisis ini, kita dapat memahami kembali fikiran-fikiran yang terbayang di

sebalik takrif-takrif ilmu matematik yang dikemukakan tadi, sekaligus menjelaskan kedudukannya sebagai salah satu ciri utama sains moden yang menggunakan matematik sebagai bahasa untuk mengungkapkan teori-teorinya. Walaupun sifat sains moden ini membayangkan satu kecenderungan reduktionis yang akibat buruknya sememangnya diketahui, namun tujuan penulisan ini adalah untuk menumpukan kepada aspek mengapa sains yang reduktionistik ini berupaya menjelaskan mengenai rahsia-rahsia alam semesta yang tidak dapat dijelaskan sebelumnya. Dengan penjelasan kedudukan matematik dalam suatu sistem ontologi yang jelas, kita dapat berhadapan dengan cabaran yang timbul daripada sains moden tanpa perlu bersikap apologetik mahupun berlebih-lebihan dalam mengkritik kelemahan-kelemahannya sehingga manfaat-manfaatnya tidak dapat diuruskan sebaiknya. Ini lebih bertepatan dengan sikap al-Imām al-Ghazālī RA dalam memperkatakan perihal matematik dan mantik, bahawa tiada manfaat kepada agama dalam penolakan melulu terhadapnya mahupun penerimaan berlebih-lebihan akannya. Yang satu akan menjadikan agama itu dianggap bodoh sedangkan yang satu lagi menafikan apa yang ada dalam agama yang tidak dapat diungkapkan menerusi cara-gaya matematik dan mantik serta kaedah-kaedahnyanya dan ini juga merosakkan agama.

Rujukan

- Burhanuddin Baki. *Badiou's Being and Event and the Mathematics of Set Theory*. London: Bloomsbury Academic, 2015.
- Ewald, William, ed., *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. vol. 1. New York: Oxford University Press, 1996.
- Franklin, James. *An Aristotelian Realist Philosophy of Mathematics*. Hampshire: Pelgrave Macmillan, 2014.
- Gowers, Timothy, ed., *The Princeton Companion to Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press, 2008.
- Heidegger, Martin. "Modern Science, Metaphysics, and Mathematics," *Martin Heidegger: Basic Writings*. Trans. W. B. Barton Jr. and Vera Deutsch, and edited by David Farrell Krell. New York: HarperCollins, 1977.
- Henry, John. *The Scientific Revolution and the Origins of Modern Science*. New York: Pelgrave, 2002.
- Kant, Immanuel. *The Critique of Pure Reason in The Great Books of the Western World* (vol. 42). Ed. Mortimer J. Adler, Chicago: William Benton, 1952.
- Körner, Stephan. *The Philosophy of Mathematics*. New York: Dover, 1986.
- Lakoff, George, dan Rafael E. Núñez. *Where Mathematics Comes From? How Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Books, 2000.
- McKeon, Richard, ed., *The Basic Works of Aristotle*. New York: The Modern Library, 2001
- Mohd. Zaidi Ismail. "Logic in Al-Ghazālī's Theory of Certitude," *Al-Shajarah* 1, no. 1&2 (1996).
- Muhammad Zainiy Uthman. *Latā'if al-Asrār li-Ahl Allāh al-Atyār of Nūr al-Dīn al-Rānirī: An Annotated Transliteration together with a Translation and an Introduction of His Exposition on the Fundamental Aspects of Sūfī Doctrines*. Kuala Lumpur: Penerbit UTM Press, 2011.
- Newman, James, ed., *The World of Mathematics*. vol. 3. New York: Simon and Schuster, 1956.

- Núñez, Rafael. “Do Real Numbers Really Move? Language, Thought, and Genture: The Embodied Cognitive Foundations of Mathematics” in *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, ed. Reuben Hersh. New York: Springer, 2006.
- Osman Bakar. *Classification of Knowledge in Islām*. Kuala Lumpur: ISTAC, 2006.
- Polanyi, Michael. *Personal Knowledge: Towards a Post Critical Philosophy*. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1st published 1958, revised paperback 1974.
- Russell, Bertrand. *Principles of Mathematics*. Oxford: Rutledge Classics, 2010.
- _____. “Mathematics and the Metaphysicians,” in *The World of Mathematics*. Ed. James R. Newman, vol. 3. New York: Simon and Schuster, 1956.
- Shaharir Mohamad Zain & Abdul Latif Samian. “PengIslāman Sains Matematik,” *Seminar Kebangsaan Isu-Isu Semasa dalam Sains* organised by ASASI-IKDM on 13–14 June 1987.
- Wigner, Eugene. “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences,” *Communications in Pure and Applied Mathematics* 13, no. I (Feb 1960).
- Wootton, David. *The Invention of Science: A New History of the Scientific Revolution*. London: Penguin Random House, 2015.